

Tema 4. Probabilidad Condicionada

Presentación y Objetivos.

En este tema se dan reglas para actualizar una probabilidad determinada en situaciones en las que se dispone de información adicional. Para ello se introduce la Probabilidad Condicionada que conducirá hacia el Teorema de Bayes, una potente herramienta de inversión de probabilidades.

Los **Objetivos** de este Tema son:

1. Entender la probabilidad condicionada como la herramienta idónea para medir la incertidumbre en un contexto prefijado.
2. Saber modelizar y resolver problemas de incertidumbre mediante el lenguaje de sucesos.
3. Dominar a nivel operativo y semántico el teorema de Bayes.

Esquema Inicial.

1. Probabilidad condicionada
2. Teorema de la probabilidad compuesta
3. Independencia de sucesos
4. Teorema de la probabilidad total
5. Teorema de Bayes

Desarrollo del Tema

1. Probabilidad condicionada.

Se denomina probabilidad de un suceso A condicionada a otro B , a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ya ha ocurrido B . Analíticamente:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ siendo } P(B) > 0$$

Obsérvese que en $A \cap B$ ocurren conjuntamente A y B y tiene asociado el espacio muestral original Ω . $A|B$ significa que en los casos en los que ya ha ocurrido B , ocurre A , y por tanto el espacio muestral es aquél en el que ha ocurrido el suceso B .

Ejemplo 1: Considérese el lanzamiento de una moneda equilibrada dos veces. Sea A el suceso “obtener cara en la 1ª tirada” y B el suceso “obtener cara en la 2ª tirada”.

$A \cap B$ está definida en el espacio muestral $\{(A, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})\}$ y tiene probabilidad $1/4$.

$B|A$ está definida en el espacio muestral $\{(A, B), (A, \bar{B})\}$ y tiene probabilidad $1/2$.

Ejemplo 2: Se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo. Sabiendo que el dado rojo es un 1 o un 2, calcular la probabilidad de que el resultado de alguno de los dados sea par.

Se definen los siguientes sucesos:

$A = \text{"alguno es par"}$

$B = \text{"el dado rojo es 1 o 2"}$

El espacio muestral para este experimento aleatorio es el conjunto de todos los pares (i, j) donde $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ siendo la primera posición para el resultado del dado azul y la segunda para el rojo. Así, $\Omega = \{(i, j): i, j = 1, 2, \dots, 6\}$ y tiene 36 posibles resultados, de los cuáles 9 son favorables al suceso $A \cap B$ y 12 al suceso B , ya que

$$A \cap B = \{(2,1), (4,1), (6,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

$$B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9/36}{12/36} = \frac{9}{12}$$

También se puede calcular esta probabilidad directamente observando el espacio muestral en el que está definido $A|B$:

$$\Omega' = \{(1,1), (\mathbf{2, 1}), (3,1), (\mathbf{4, 1}), (5,1), (\mathbf{6, 1}), (\mathbf{1, 2}), (\mathbf{2, 2}), (\mathbf{3, 2}), (\mathbf{4, 2}), (\mathbf{5, 2}), (\mathbf{6, 2})\}$$

Hay 12 resultados posibles de los que 9 son favorables a $A|B$ (los destacados en negrita), con lo que:

$$P(A|B) = \frac{9}{12}$$

como ya se obtuvo anteriormente.

La definición de probabilidad condicionada se puede extender para cualquier número de sucesos del espacio muestral. Por ejemplo,

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}, \quad P(B \cap C) > 0$$

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}, \quad P(C) > 0$$

2. Teorema de la Probabilidad compuesta.

En ocasiones se necesita calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos. Esto es posible a partir de la fórmula ya vista de probabilidad condicionada.

Si $P(A), P(B) > 0$,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Generalizando a n sucesos A_1, \dots, A_n tales que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Las probabilidades del término de la derecha están bien definidas ya que

$$P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$$

al ser $A_1 \supset A_1 \cap A_2 \supset \dots \supset A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$.

Este teorema también se conoce como **teorema del producto** o **regla de multiplicación**.

Ejemplo 3: Se desea calcular la probabilidad de que un trabajo se procese inmediatamente cuando se requiere. Este suceso es la intersección de los dos sucesos siguientes:

$A = \text{"el computador está funcionando"}$

$B = \text{"el trabajo se procesará de inmediato"}$

Calcular la probabilidad de que un trabajo presentado se procese de inmediato, sabiendo que la probabilidad de que el computador esté funcionando en un momento determinado es 0,9 y de que el trabajo se procese de inmediato si el computador está funcionando es 0,05.

Del enunciado se tiene que $P(A) = 0,9$ y $P(B|A) = 0,05$, y hay que obtener $P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0,9 \times 0,05 = 0,045$$

3. Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia del otro, es decir,

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

Utilizando la definición de probabilidad condicionada se obtiene una definición equivalente para la independencia de sucesos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Ejemplo 4: Una urna contiene 4 bolas blancas y 2 negras. Se extraen dos bolas

- a) con reemplazamiento
- b) sin reemplazamiento

Comprobar si son independientes los sucesos $A = \text{"primera bola es blanca"}$ y $B = \text{"segunda bola es blanca"}$.

- a) Con reemplazamiento:

$$P(A) = \frac{4}{6} = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$$

Así, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y **SÍ** son independientes.

- b) Sin reemplazamiento:

$$P(A) = \frac{4}{6}$$

$$P(B) = P(\{nb\} \cup \{bb\}) = P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = \\ = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) + P(A)P(B|A) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$$

Así, $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ y **NO** son independientes.

Como se puede observar la diferencia entre extraer las bolas con reemplazamiento y sin reemplazamiento está en la noción de independencia.

3.1 Fiabilidad de un sistema

Se define la **fiabilidad** de un sistema como la probabilidad de que el sistema funcione correctamente. Un sistema será un conjunto de componentes dispuestos según un diseño determinado para garantizar una fiabilidad aceptable.

Ejemplo 5: Considérese una máquina formada por 4 componentes conectados en serie de manera que la máquina funciona sólo si funcionan todos ellos. Si los cuatro componentes operan de forma independiente y la probabilidad de que un componente funcione después de 100 horas es 0,95, calcular la fiabilidad del sistema después de 100 horas.

Se definen los sucesos

$$C_i = \text{"componente } i \text{ funciona"}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Aplicando la independencia de los sucesos, la fiabilidad de la máquina es

$$P(\text{sistema funcione}) = P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = P(C_1)P(C_2)P(C_3)P(C_4) = 0,95^4 = 0,8145$$

Se observa que aunque la fiabilidad de cada componente es alta, la de la máquina no lo es tanto al requerir el funcionamiento de todos los componentes. Para resolver esto se pueden disponer varios sistemas en paralelo de manera que el sistema funcione si al menos uno de esos sistemas funciona.

Ejemplo 6: Un sistema contiene 3 componentes A, B y C conectados según se indica en la figura 1.

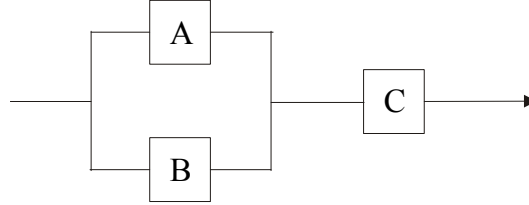


Figura 1: Configuración del sistema del ejemplo 6

Si los tres componentes funcionan independientemente y la probabilidad de que uno cualquiera de ellos esté funcionando es 0,95, obtener la probabilidad de que el sistema funcione.

Sea A el suceso que representa que funciona el componente A, análogo para B y C. La fiabilidad del sistema es

$$\begin{aligned}
 P(\text{sistema funcione}) &= P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
 &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
 &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) = 2 \cdot 0,95^2 - 0,95^3 = 0,9476
 \end{aligned}$$

También se puede calcular a partir de su complementario:

$$P(\text{sistema funcione}) = 1 - P(\text{sistema no funcione})$$

donde

$$\begin{aligned}
 P(\text{sistema no funcione}) &= P((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{C}) - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \\
 &= P(\bar{A})P(\bar{B}) + P(\bar{C}) - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,05^2 + 0,05 - 0,05^3 = 0,05237
 \end{aligned}$$

y por tanto, la probabilidad de que el sistema funcione es $1 - 0,05237 = 0,9476$, como ya se había calculado.

En la resolución de este ejemplo se ha utilizado que si A , B y C son independientes mutuamente, también lo son sus complementarios \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} .

4. Teorema de la Probabilidad total.

El teorema de la probabilidad total permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas.

Sea (B_1, \dots, B_n) un sistema completo sucesos (disjuntos y tales que $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$) de modo que $P(B_i) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Dado cualquier suceso A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Ejemplo 7: Dos cajas contienen chips grandes y chips pequeños. La primera caja contiene 60 chips grandes y 40 pequeños, y la segunda 10 grandes y 20 pequeños. Se selecciona una caja al azar y se extrae un chip de la misma. Determinar la probabilidad de que el chip sea grande.

Se definen los sucesos

B_1 = "seleccionar la primera caja"

B_2 = "seleccionar la segunda caja"

A = "el chip es grande"

La figura 2 muestra el diagrama de Venn para este ejemplo.

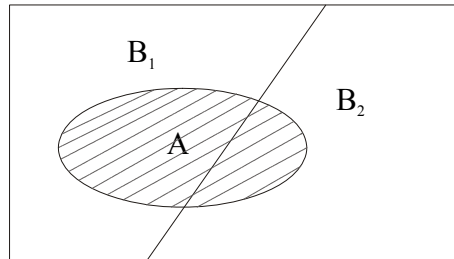


Figura 2: Diagrama de Venn del ejemplo 7

La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{60}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{30} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

5. Teorema de Bayes.

El teorema de Bayes va a seguir el proceso inverso al realizado en el teorema de la probabilidad total.

Sea (B_1, \dots, B_n) un sistema completo de sucesos de modo que $P(B_i) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Dado cualquier suceso A tal que $P(A) > 0$,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

Para entender el mecanismo del teorema de Bayes, supóngase que se realiza un experimento en dos fases:

1. En la primera, los sucesos posibles B_1, \dots, B_n son mutuamente excluyentes (disjuntos dos a dos) con probabilidades conocidas y tales que $\sum P(B_i) = 1$.
2. En la segunda, los resultados posibles A_j dependen de la primera y lo que es conocido son las probabilidades condicionadas $P(A_j|B_i)$ de obtener cada posible resultado A_j cuando aparece en la primera fase B_i .

Se realiza entonces el experimento pero sólo se conoce el resultado de la segunda etapa que resulta ser A . El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades $P(B_i|A)$ de los sucesos no observados de la primera etapa, dado el resultado de la segunda.

Aunque este teorema parezca una simple aplicación de la probabilidad condicionada, ha sido clave en el desarrollo de la **inferencia estadística bayesiana**, en la que se emplea la interpretación subjetiva de la probabilidad. En este contexto las probabilidades $P(B_1), \dots, P(B_n)$ se conocen con el nombre de probabilidades a priori mientras que las probabilidades $P(B_j|A)$ se denominan probabilidades a posteriori, ya que se determinan una vez obtenida la evidencia muestral. Esta evidencia permite calcular las probabilidades $P(A|B_j)$ llamadas verosimilitudes.

Ejemplo 8: En el ejemplo anterior, supóngase que se sabe que el chip extraído ha sido grande. Calcular la probabilidad de que proceda de la primera caja.

Hay que calcular la probabilidad $P(B_1|A)$. Aplicando el teorema de Bayes,

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{3/10}{7/15} = \frac{45}{70} \cong 0,64$$

Ejemplo 9: Una universidad compra sus equipos informáticos a tres proveedores diferentes. Supóngase que el 20% de los equipos fueron comprados al proveedor 1, el 30% al proveedor 2 y el 50% al proveedor 3. Además, se sabe que el 1% de los equipos del proveedor 1 fallan antes del primer año, el 2% de los del proveedor 2 y el 3% de los del proveedor 3. Se selecciona al azar un computador y se observa que falla antes del primer año. Determinar la probabilidad de que éste haya sido comprado al proveedor 2.

Se consideran los siguientes sucesos:

B_i = "el computador fue comprado al proveedor i "

A = "el computador falló antes del primer año"

Por el enunciado se conocen las siguientes probabilidades

$$P(B_1) = 0,2 \quad P(A|B_1) = 0,01$$

$$P(B_2) = 0,3 \quad P(A|B_2) = 0,02$$

$$P(B_3) = 0,5 \quad P(A|B_3) = 0,03$$

Por el teorema de Bayes,

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{j=1}^3 P(A|B_j)P(B_j)} = 0,26$$